

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

**Ediția a XXVII-a
ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025**

Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1:

Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X-1)^{2025} + (X-3)^{2024} + 1$, cu forma algebrică

$$f = a_{2025}X^{2025} + a_{2024}X^{2024} + \dots + a_1X + a_0 \text{ și rădăcinile } x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in \mathbb{C}.$$

a) Să se calculeze suma coeficienților polinomului.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 4X + 4$.

c) Să se calculeze numărul $A = \frac{x_1}{x_2 x_3 \dots x_{2025}} + \frac{x_2}{x_1 x_3 \dots x_{2025}} + \dots + \frac{x_{2025}}{x_1 x_2 \dots x_{2024}}$.

d) Să se arate că polinomul f admite o rădăcină cu modulul mai mic decât 3.

SOLUȚIE: a) $a_{2025} + a_{2024} + \dots + a_1 + a_0 = f(1) = 0 + (-2)^{2024} + 1 = 2^{2024} + 1 \dots \dots \dots 1p$

b) $g = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$, $f = g \cdot q + r$, $\text{grad}(r) < 2 \Rightarrow f = (X-2)^2 \cdot q(X) + aX + b$; $f(2) = 2a + b$,
 $f(2) = 1^{2025} + (-1)^{2024} + 1 = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \dots \dots \dots 1p$

Asociem funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^{2025} + (x-3)^{2024} + 1 = (x-2)^2 \cdot q(x) + ax + b$, care e derivabilă și

$f'(x) = 2025(x-1)^{2024} + 2024(x-3)^{2023} = 2(x-2)q(x) + (x-2)^2 q'(x) + a \Rightarrow f'(2) = 2025 - 2024 = a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$
 $b = 1 \Rightarrow r = X + 1 \dots \dots \dots 2p$

c) Folosim dezvoltarea binomului lui Newton și obținem:

$$f = C_{2025}^0 X^{2025} + (-C_{2025}^1 + C_{2024}^0) X^{2024} + (C_{2025}^2 - 3C_{2024}^1) X^{2023} + \dots + (-C_{2025}^{2025} + 3^{2024} C_{2024}^{2024} + 1);$$

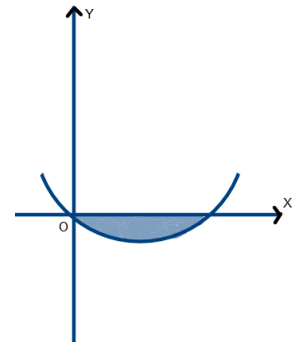
$$S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_{2025} = 2024, \quad S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{2024} x_{2025} = 2019 \cdot 1012, \quad S_{2025} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2025} = -3^{2024} \Rightarrow$$

$$A = \frac{S_1^2 - 2S_2}{S_{2025}} = -\frac{5 \cdot 2024}{3^{2024}} = -\frac{10120}{3^{2024}} \dots \dots \dots 2p$$

d) Presupunem prin reducere la absurd că $|x_1| \geq 3$, $|x_2| \geq 3$, ..., $|x_{2025}| \geq 3 \Rightarrow |x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2025}| \geq 3^{2025}$ în contradicție
cu $|x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2025}| = 3^{2024}$, prin urmare polinomul f admite o rădăcină cu modulul mai mic decât 3. 1p

Subiectul 2.

Un colier din argint este format din piese de forma celei prezentate în figura alăturată. Suprafața piesei este cuprinsă între graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ și axa Ox , iar unitatea de măsură este centimetrul.



- Cu cât este egală aria unei piese?
- Știind că bijuteria conține 80 de astfel de piese, stabiliți dacă este suficientă o coală de argint dreptunghiulară cu dimensiunile 4 cm și 5 cm pentru confecționarea colierului; în caz afirmativ, prezentați o modalitate de încadrare a celor 80 de piese în dreptunghiul dat.
- Bijutierul gravează un model pe jumătate din suprafața unei piese. Determinați numărul real a , astfel încât funcția $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ să delimiteze cele două suprafețe echivalente ale piesei.

SOLUȚIE:

a) $G_f \cap Ox = \{O(0,0), A(1,0)\} \Rightarrow S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \frac{1}{6} \text{ cm}^2$ 2p

b) $\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} = -0,25 \Rightarrow |\min f(x)| = 0,25 \text{ cm}$. Piesa se poate încadra într-un dreptunghi cu dimensiunile 1cm și 0,25cm, de arie $0,25 \text{ cm}^2$. Aria colii este 20 cm^2 . Numărul de dreptunghiuri mici este $20 : 0,25 = 80$, deci se poate confecționa bijuteria.....2p

c) Pentru $x \in [0,1]$, dreapta ce reprezintă graficul funcției g , intersectează graficul funcției f în două puncte $O(0,0), M(a+1, a^2 + a)$ 1p

Jumătate din aria piesei este $\frac{1}{12}$, deci $\int_0^{a+1} |g(x) - f(x)| dx = \int_0^{a+1} |ax - x^2 + x| dx = \frac{1}{12} \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}(a+1) - \frac{x^3}{3} \right] /_0^{a+1} = \frac{1}{12}$
 $\Rightarrow \frac{(a+1)^3}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow a = -1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 2p

Subiectul 3.

Se consideră mulțimea $G = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} & \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in (-1,1) \right\}.$

- Arătați că mulțimea G este parte stabilă a mulțimii $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
- Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.
- Pentru $a \in (-1,1)$, determinați $x \in (-1,1)$ știind că $M(x) = M^{2025}(a)$.

SOLUȚIE: a) Se arată că $\forall M(a_1), M(a_2) \in G, M(a_1) \cdot M(a_2) = M\left(\frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 a_2}\right)$ și demonstrează că

$\frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 a_2} \in (-1,1), \forall a_1, a_2 \in (-1,1) \dots\dots\dots 1p$

b) Se verifică axiomele grupului comutativ : (M_1) : înmulțirea matricelor este întotdeauna asociativă.

(M_2) : $M(a_1) \cdot M(a_2) = M\left(\frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 a_2}\right) = M(a_2) \cdot M(a_1), \forall M(a_1), M(a_2) \in G$ deoarece adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt operații comutative.

(M_3) : $\exists M(0) \in G$, astfel încât $M(a) \cdot M(0) = M(0) \cdot M(a) = M(a), \forall M(a) \in G$

(M_4) : $M(a) \cdot M(-a) = M\left(\frac{a + (-a)}{1 + a(-a)}\right) = M(0), \forall M(a) \in G \dots\dots\dots 3p$

c) $M^2(a) = M\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) = M\left(\frac{(1+a)^2 - (1-a)^2}{(1+a)^2 + (1-a)^2}\right) \dots\dots\dots 1p$

Se demonstrează inductiv că $M^n(a) = M\left(\frac{(1+a)^n - (1-a)^n}{(1+a)^n + (1-a)^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$

Se obține $x = \frac{(1+a)^{2025} - (1-a)^{2025}}{(1+a)^{2025} + (1-a)^{2025}} \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 4.

Se consideră funcțiile $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-1}$ și $g : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x+1}$.

a) Arătați că $\sqrt{3} \leq \int_2^5 \frac{f(x)}{g(x)} dx \leq \sqrt{6}.$

b) Arătați că $\int_2^3 \frac{xf(x)}{(x^2-1)g(x)} dx = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6} + \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}.$

c) Calculați mulțimea primitivelor funcției $h : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{\sqrt[2025]{f^{4048}(x) \cdot g^{4052}(x)}}.$

SOLUȚIE: a) Funcția $t: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ este derivabilă pe $[2, 5]$ cu derivata

$$t'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 0, \forall x \in [2, 5] \Rightarrow t \text{ este strict crescătoare pe } [2, 5] \Rightarrow t(2) \leq t(x) \leq t(5), \forall x \in [2, 5] \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{3}, \forall x \in [2, 5] \dots\dots\dots 1p$$

Cum funcția t este continuă și integrabilă pe $[2, 5]$, se obține $\sqrt{3} \leq \int_2^5 \frac{f(x)}{g(x)} dx \leq \sqrt{6} \dots\dots\dots 1p$

b) $I = \int_2^3 \frac{xf(x)}{(x^2-1)g(x)} dx = \int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$. Făcând substituția $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = u \Rightarrow x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ și $dx = \frac{4u}{(1-u^2)^2} du$. 1p

Dacă $x=2$ obținem $u = \frac{\sqrt{3}}{3}$, iar dacă $x=3$ obținem $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Atunci $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1+u^2}{1-u^2} du = \left[-u + \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6} + \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} \dots\dots\dots 2p$$

c) $J = \int h(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt[2025]{f^{4048}(x) \cdot g^{4052}(x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[2025]{(x-1)^{2024} (x+1)^{2026}}} dx = \int \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot \sqrt[2025]{\frac{x+1}{x-1}}} dx$

$$J = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \sqrt[2025]{\frac{x-1}{x+1}} \right) dx. \text{ Făcând substituția } t = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow dt = \frac{-2}{(x-1)^2} dx \dots\dots\dots 1p$$

se obține $J = -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2025}} \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \int t^{-1-\frac{1}{2025}} dt = \frac{2025}{2} \sqrt[2025]{\frac{x-1}{x+1}} + C \dots\dots\dots 1p$

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.